

Ștefan SMĂRĂNDOIU      Marius PERIANU

Dumitru SĂVULESCU      Iohana GHEORGHE

# Matematică

clasa a VI-a

## II



# CUPRINS

## ALGEBRĂ Capitolul 1. Rapoarte și proporții

1.1. Rapoarte .....	7
1.2. Procente.....	12
1.3. Proporții .....	18
1.4. Proporții derivate .....	24
<i>Teste de evaluare</i> .....	29
<i>Fișă pentru portofoliul individual (A1)</i> .....	31
<i>Test – model pentru Evaluarea Națională</i> .....	33
1.5. Mărimi direct proporționale .....	35
1.6. Mărimi invers proporționale .....	39
1.7. Regula de trei simplă .....	43
1.8. Reprezentarea datelor prin grafice .....	47
1.9. Probabilități .....	52
<i>Teste de evaluare</i> .....	55
<i>Fișă pentru portofoliul individual (A2)</i> .....	57
<i>Test – model pentru Evaluarea Națională</i> .....	59
1.11. Probleme cu caracter aplicativ .....	61

## ALGEBRĂ Capitolul 2. Numere întregi

2.1. Număr întreg.....	65
2.2. Compararea și ordonarea numerelor întregi .....	70
2.3. Adunarea numerelor întregi .....	73
2.4. Scăderea numerelor întregi .....	79
<i>Teste de evaluare</i> .....	83
<i>Fișă pentru portofoliul individual (A3)</i> .....	85
2.5. Înmulțirea numerelor întregi .....	87
2.6. Împărțirea numerelor întregi .....	92
2.7. Puterea unui număr întreg .....	96
2.8. Ordinea efectuării operațiilor .....	100
<i>Teste de evaluare</i> .....	103
<i>Fișă pentru portofoliul individual (A4)</i> .....	105
2.9. Rezolvarea unor ecuații în $\mathbb{Z}$ .....	107
2.10. Rezolvarea unor inecuații în $\mathbb{Z}$ .....	110
2.11. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor sau inecuațiilor .....	113
<i>Teste de evaluare</i> .....	115
<i>Fișă pentru portofoliul individual (A5)</i> .....	117
<i>Test – model pentru Evaluarea Națională</i> .....	119

## GEOMETRIE Capitolul 3. Perpendicularitate

3.1. Drepte perpendiculare .....	123
----------------------------------	-----



3.2.	Congruența triunghiurilor dreptunghice .....	127
3.3.	Mediatoarea .....	129
3.4.	Simetria față de o dreaptă .....	133
3.5.	Bisectoarea .....	136
	<i>Teste de evaluare</i> .....	139
	<i>Fișă pentru portofoliul individual (G1)</i> .....	141
3.6.	Înălțimile triunghiului .....	143
3.7.	Medianele triunghiului .....	146
	<i>Teste de evaluare</i> .....	149
	<i>Fișă pentru portofoliul individual (G1)</i> .....	151
	<i>Test – model pentru Evaluarea Națională</i> .....	153
3.8.	Probleme pentru performanță școlară și olimpiade .....	155

## **GEOMETRIE Capitolul 4. Paralelism**

4.1.	Unghiuri determinate de două drepte cu o secantă .....	159
4.2.	Drepte paralele .....	159
	<i>Teste de evaluare</i> .....	168
	<i>Fișă pentru portofoliul individual (G2)</i> .....	169
	<i>Test – model pentru Evaluarea Națională</i> .....	171
4.3.	Probleme pentru performanță școlară și olimpiade.....	173

## **GEOMETRIE Capitolul 5. Proprietățile triunghiurilor**

5.1.	Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi .....	177
5.2.	Proprietățile triunghiului isoscel .....	181
	<i>Teste de evaluare</i> .....	189
	<i>Fișă pentru portofoliul individual (G3)</i> .....	191
5.3.	Proprietățile triunghiului echilateral .....	193
	<i>Teste de evaluare</i> .....	197
	<i>Fișă pentru portofoliul individual (G3)</i> .....	199
5.4.	Proprietățile triunghiului dreptunghic .....	201
	<i>Teste de evaluare</i> .....	207
	<i>Fișă pentru portofoliul individual (G3)</i> .....	209
5.5.	Relații între laturi și unghiuri (extindere).....	211
	<i>Test – model pentru Evaluarea Națională</i> .....	216
5.6.	Probleme cu caracter aplicativ.....	218
5.7.	Probleme pentru performanță școlară și olimpiade.....	220

## **SINTEZE Capitolul 6. Variante de subiecte pentru teză**..... 225

## **SOLUȚII** ..... 233

## CAPITOLUL

## 1

*Rapoarte și proporții***1.1. Rapoarte****1.2. Procente****1.3. Proporții****1.4. Proporții derivate***Teste de evaluare**Fișă pentru portofoliul individual (A1)**Test-model pentru Evaluarea Națională***1.5. Mărimi direct proporționale****1.6. Mărimi invers proporționale****1.7. Regula de trei simplă****1.8. Reprezentarea datelor prin grafice****1.9. Probabilități***Teste de evaluare**Fișă pentru portofoliul individual (A2)**Test-model pentru Evaluarea Națională***1.10. Probleme cu caracter practic**



# Rapoarte și proporții

## 1.1. Rapoarte

**Raport.** Prin *raportul* numerelor raționale pozitive  $a$  și  $b$ , cu  $b \neq 0$ , se înțelege numărul rațional  $a : b$ , notat  $\frac{a}{b}$ .

Scrierea  $\frac{a}{b}$  este *raportul*, iar  $a$  și  $b$  sunt *termenii* raportului.

**Valoarea unui raport**  $\frac{a}{b}$  este numărul  $c$  care se obține din relația  $c = a : b$ .

**Exemplu.** Într-o clasă sunt 12 fete și 16 băieți. Spunem că raportul dintre numărul fetelor și cel al băieților este egal cu  $\frac{12}{16}$ . Valoarea raportului este  $12 : 16 = 0,75$ .

### Observații

1. La scrierea raportului a două mărimi, de aceeași natură, acestea trebuie exprimate în aceeași unitate de măsură. De exemplu, dacă lățimea unui dreptunghi este egală cu 120 cm, iar lungimea este egală cu 3,6 m, pentru a afla raportul dintre lățime și lungime, întâi transformăm:

$$L = 3,6 \text{ m} = 360 \text{ cm} \text{ și apoi avem: } \frac{l}{L} = \frac{120 \text{ cm}}{360 \text{ cm}} = \frac{1}{3}.$$

2. Se pot forma rapoarte și cu cantități de tipuri diferite. De exemplu, dacă unui om îi trebuie 3 ore pentru a parcurge 12 km, se formează raportul  $\frac{12 \text{ km}}{3 \text{ h}} = 4 \text{ km/h}$ .

Formarea raportului duce la un nou concept, de *viteză*, cu unitatea de măsură km/h.

3. Valoarea unui raport nu se schimbă dacă înmulțim sau împărțim ambii termeni ai săi cu același număr real, nenul:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot m}{b \cdot m}, m \neq 0 \quad \text{și} \quad \frac{a}{b} = \frac{a : n}{b : n}, n \neq 0.$$

### Exemple de rapoarte utilizate în practică

1. *Raportul procentual* este un raport de forma  $\frac{p}{100}$  care se notează  $p\%$ .

**Exemplu.**  $19\% = \frac{19}{100}$ .

2. *Scara unei hărți* este raportul dintre distanța pe hartă și distanța pe teren.

**Exemplu.** Pe o hartă, unui segment ce are lungimea de 1 cm îi corespunde o distanță în teren egală cu 2 km. Deoarece 2 km = 200 000 cm, scara hărții este 1 : 200 000.

3. *Concentrația unei soluții* este raportul dintre masa substanței care se dizolvă și masa soluției.

**Exemplu.** În 190 g de apă se dizolvă 10 g sare. Concentrația soluției este egală cu:

$$\frac{10}{190+10} = \frac{10}{200} = \frac{5}{100} = 5\%.$$

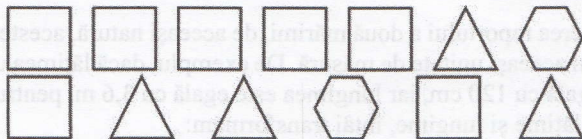
4. **Titlul unui aliaj** este raportul dintre masa metalului prețios și masa aliajului.

**Exemplu.** Un aliaj conține 240 g aur și 960 g cupru. Titlul aliajului este egal cu:

$$\frac{240}{240+960} = \frac{240}{1200} = \frac{1}{5} = \frac{200}{1000} = 0,2.$$



1. Scrieți raportul numerelor: **a)** 15 și 41; **b)** 3 și 10; **c)** 200 și 25; **d)** 36 și 45.
2. Fie numerele  $a = 24$  și  $b = 19$ . Completați:  
**a)** Raportul numerelor  $a$  și  $b$  este ... **b)** Raportul numerelor  $b$  și  $a$  este ...
3. Într-o clasă, din cei 30 de elevi, fiecare al treilea elev participă la olimpiada de matematică. Scrieți raportul dintre numărul celor care participă și al celor care nu participă la olimpiadă.
4. Scrieți raportul dintre numărul triunghiurilor și cel al pătratelor din desenul de mai jos:



5. Determinați valoarea raportului numerelor 72 și 140.
6. Fie  $a = 9$  și  $b = 2$ . Care este valoarea raportului dintre  $b$  și  $a$ ?
7. O urnă conține 25 de bile: 10 albe, 5 roșii și restul albastre. Scrieți raportul dintre:  
**a)** numărul bilelor albe și numărul bilelor albastre;  
**b)** numărul bilelor albe și numărul bilelor roșii și albastre la un loc;  
**c)** numărul total de bile și numărul bilelor care nu sunt albe.
8. Scrieți raportul dintre cel mai mic număr de o cifră și cel mai mare număr de o cifră.
9. Scrieți raportul dintre cel mai mare număr de trei cifre și cel mai mic număr de două cifre.
10. Se dau mulțimile:  $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$  și  $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ .  
**a)** Scrieți raportul a două numere pare, primul din mulțimea  $A$ , iar al doilea din mulțimea  $B$ . Dați trei exemple.  
**b)** Scrieți raportul dintre un număr par din  $A$  și un număr impar din  $B$ .



11. Se dau mulțimile:  $A = \{2, 3, 4\}$  și  $B = \{3, 4, 5, 6, 8\}$ .  
Câte rapoarte se pot forma având primul termen un element din mulțimea  $A$  și al doilea termen un element din mulțimea  $B$ ?



12. Se dau mulțimile:  $A = \{2, 3, 4\}$  și  $B = \{3, 4, 5, 6, 8\}$ .
- a) Câte rapoarte de forma  $\frac{a}{b}$  au valoarea 1, dacă  $a \in A$  și  $b \in B$ ?
- b) Câte rapoarte de forma  $\frac{b}{a}$  au valoarea 2, dacă  $b \in B$  și  $a \in A$ ?
- c) Câte rapoarte de forma  $\frac{m}{n}$  au valoarea un număr natural, dacă  $m \in A \cup B$  și  $n \in A \setminus B$ ?
13. Alegeți elemente ale mulțimii  $A = \left\{0, 25; 3; 3\frac{1}{4}; 0,3(5)\right\}$  și alcătuiți rapoarte care să aibă valoarea: a) 12; b) 1,08(3); c) 1,4(2).
14. Alcătuiți patru rapoarte ce au valoarea egală cu a) 1,25; b) 0,6; c) 2.
15. Determinați scara unei hărți știind că o distanță de 10 km dintre două localități este reprezentată pe hartă printr-un segment de 1 cm.
16. O distanță de 60 km se reprezintă pe o hartă printr-un segment de 2 cm. Aflați scara acestei hărți.
17. Determinați concentrația unei soluții obținută din 240 g apă și 10 g sare.
18. Determinați titlul unui aliaj ce conține 810 g aur și 1190 g aramă.
19. Se dau numerele  $a = 1,25$  și  $b = 1\ 250$ .
- a) Scrieți raportul numerelor  $a$  și  $b$ .
- b) Determinați valoarea raportului numerelor 1 și  $\frac{a}{b}$ .
20. Valoarea raportului numerelor  $a$  și  $b$  este egală cu 1,6. Completați pentru a obține o propoziție adevărată: „*Produsul dintre 3 și  $\frac{a}{b}$  este egal cu ...*”
21. Valoarea raportului  $\frac{a}{b}$  este 0,5. Calculați  $a$ , știind că  $b$  este egal cu 2,6(3).
22. Fie  $x$  și  $y$  două numere al căror raport este  $\frac{1}{2}$ . Determinați valoarea raportului  $\frac{3x}{5y}$ .
23. Scrieți raportul lungimilor  $a$  și  $b$  știind că:
- a)  $a = 12$  cm și  $b = 24$  cm; b)  $a = 340$  cm<sup>2</sup> și  $b = 170$  cm<sup>2</sup>;
- c)  $a = 4$  cm și  $b = 2$  dm; d)  $a = 18\ 000\ 000$  mm<sup>3</sup> și  $b = 15$  dm<sup>3</sup>;
- e)  $a = 34000$  cm<sup>2</sup> și  $b = 6,8$  m<sup>2</sup>.
24. Calculați valoarea următoarelor rapoarte:
- a)  $\frac{200}{25}$ ; b)  $\frac{49}{14}$ ; c)  $\frac{3,41}{0,01}$ ; d)  $\frac{18,17}{1,817}$ ; e)  $\frac{75}{15}$ ; f)  $\frac{42}{12}$ ; g)  $\frac{3,(5)}{2,(4)}$ .
25. Pentru fiecare dintre situațiile următoare calculați termenul care lipsește sau valoarea raportului:

$$a) \frac{\square}{2} = 1,5; \quad b) \frac{7}{\square} = 3,5; \quad c) \frac{18}{\square} = 9; \quad d) \frac{\square}{11} = 4; \quad e) \frac{250}{25} = \square; \quad f) \frac{36}{96} = \square.$$

26. Se știe că  $\frac{4x}{3y} = \frac{5}{18}$ . Care este valoarea raportului numerelor  $y$  și  $x$ ?
27. Raportul lungimilor laturilor a două pătrate este 3. Completați:  
 a) Raportul dintre perimetrele lor are valoarea ...  
 b) Raportul ariilor este egal cu ...
28. Raportul perimetrelor a două pătrate are valoarea 1,8. Care este raportul ariilor?
29. Raportul dintre ariile a două pătrate are valoarea 0,09. Aflați raportul dintre lungimile laturilor lor.
30. Valoarea raportului lățimilor a două pătrate este 2,56. Care este raportul perimetrelor?
31. Valoarea raportului lățimilor a două dreptunghiuri este  $0,(\underline{\quad})$ , iar valoarea raportului lungimilor este 1,2. Determinați raportul ariilor.
32. Un dreptunghi are aria egală cu  $6 \text{ cm}^2$ . Determinați lungimile laturilor sale știind că raportul dintre lățime și lungime are valoarea  $0,(\underline{\quad})$ .
33. Se știe că  $\frac{11a}{5b} = 550$ . Calculați valoarea raportului  $\frac{a}{b}$ .
34. Se știe că  $\frac{4a}{3b} = 7,8$ . Calculați valoarea raportului  $\frac{5a}{9b}$ .



35. Aflați valoarea raportului  $\frac{a}{b}$ , unde  $a = 1 + 2 + 3 + \dots + 60$  și  $b = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{59}{60}$ .
36. Despre numerele  $a, b, c$  se știe că  $\frac{a}{b} = 4$  și  $\frac{a}{c} = \frac{5}{2}$ . Calculați raportul numerelor  $b$  și  $c$ .
37. Aflați  $a, b, c$ , știind că suma lor este 63 și că rapoartele  $\frac{c}{b}$  și  $\frac{b}{a}$  au valoarea 4?
38. Calculați termenul necunoscut din:  
 a)  $\frac{5}{x} = 0,20$ ;      b)  $\frac{x}{9} = 4,2$ ;      c)  $\frac{11}{x} = 1,4$ ;  
 d)  $\frac{9}{x} = 4$ ;      e)  $\frac{8,3}{5} = x$ ;      f)  $\frac{6,(\underline{\quad})}{x} = 8$ .
39. Găsiți trei numere, știind că raportul dintre primul și al doilea este egal cu  $\frac{4}{2}$ ,



raportul dintre al doilea și al treilea este  $\frac{9}{7}$ , iar suma lor este cel mai mic număr natural de forma  $\overline{xy4}$ , mai mare decât 400, scris în baza 10, divizibil cu 36.

*Etapa Județeană, Alba, 1991*

40. Calculați valoarea raportului  $\frac{ab+ac}{b^2+c^2}$ , știind că  $b$  este două treimi din numărul  $a$ , iar  $c$  este șapte pătrimi din suma numerelor  $a$  și  $b$ .

*Etapa Locală, Neamț, 1994*

41. Un autoturism consumă 1,8 litri de benzină la 30 km. Care este raportul procentual al consumului?

42. Știind că  $\frac{x}{y} = 0,75$  aflați valoarea raportului  $\frac{5y-7x}{6y-8x}$ , dacă există.

*Etapa Locală, Mureș, 1994*

43. Determinați toate numerele naturale de două cifre, știind că raportul oricăruia dintre ele și răsturnatul său este  $\frac{4}{7}$ .

*Etapa Locală, Sălaj, 2010*

### Probleme de șapte stele

44. Trei numere naturale  $a, b, c$  îndeplinesc condițiile:  $b$  este egal cu  $\frac{4}{7}$  din  $a$ ;  $c$  este egal cu  $\frac{2}{3}$  din suma celorlalte două, iar produsul  $P$  al celor trei numere se divide prin suma lor  $S$ .

a) Arătați că  $S$  se divide prin 275.

b) Verificați dacă  $\frac{P}{S}$  este multiplu de 2520.

c) Aflați cele mai mici numere  $a, b, c$ .

*Monica Guița, Etapa Locală Sibiu, 2010*

45. Știind că  $\frac{x}{y} = \frac{7}{2}$ , calculați  $\frac{3x+5y}{2x+y}$ ,  $y \neq 0$ .

*Etapa Locală, Harghita, 2010*

46. Notăm cu  $A$  mulțimea formată din numerele  $\overline{abcd}$  care verifică egalitatea:

$$\frac{\overline{abcd} - \overline{abd}}{\overline{abc}} = d, \text{ cu } a \neq 0.$$

a) Arătați că  $2009 \in A$ .

b) Calculați suma elementelor mulțimii  $A$ .

*Etapa Județeană, Brăila, 2010*

# E

## TESTE DE EVALUARE

### Testul 1

1. Lungimea unui dreptunghi este de 24 cm, iar lățimea de 18 cm. Aflați raportul dintre: **a)** lungime și lățime; **b)** lățime și lungime.
2. Scrieți raportul dintre numerele  $4\frac{1}{2}$  și  $2\frac{1}{4}$  și calculați valoarea acestui raport.
3. Aflați  $x$  din  $\frac{x}{65} = \frac{4}{10}$ .
4. Determinați numerele  $x$ ,  $y$  și  $z$  știind că  $\frac{x}{7} = \frac{y}{5} = \frac{z}{11}$  și  $x + y + z = 138$ .
5. Fie proporția  $\frac{0,5}{3} = \frac{4}{24}$ . Pornind de la aceasta scrieți:  
**a)** două proporții derivate cu aceeași termeni;  
**b)** o proporție derivată cu termeni schimbați.
6. Calculați 15% din 280 kg.
7. Smântâna reprezintă 6% din cantitatea de lapte. Din ce cantitate de lapte se obțin 15 ℓ de smântână?

### Testul 2

1. Determinați  $x$  din proporția  $\frac{2\frac{1}{3}}{x} = \frac{0,5}{1\frac{3}{7}}$ .
2. Calculați valoarea raportului dintre cel mai mic număr natural de două cifre și cel mai mare număr par natural de trei cifre.
3. Suma a trei numere este 560. Determinați numerele știind că ele sunt proporționale cu 2, 11 și 7.
4. S-au pus la încolțit 400 de semințe și dintre acestea nu au încolțit 36. Care este procentul de semințe încolțite (adică procentul de germinație al semințelor)?
5. Prețul unei cămăși a fost de 48 lei și s-a stabilit să se facă o reducere de 15%. Cât este noul preț al cămășii?
6. Știind că  $\frac{3x-y}{2x+y} = \frac{5}{4}$ , calculați valoarea raportului  $\frac{x}{y}$ .
7. Pornind de la proporția  $\frac{3}{6} = \frac{5}{10}$  scrieți o proporție derivată cu termeni schimbați în care un termen să fie 24.